ECOLE NATIONALE DES INGENIEURS DES TRAVAUX RURAUX ET DES TECHNIQUES SANITAIRES

STRASBOURG

CONCOURS D'ENTRÉE 1981

OPTION BIOLOGIE-MATHÉMATIQUES

PREMIÈRE ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Durée : 3 heures

N.B. Ce sujet comporte 2 pages de texte.

L'attention des candidats est attirée sur l'importance d'une rédaction claire et rigoureuse de chacune des questions du problème.

Etant donné un nombre réel T ($T > 0$), on dit qu'une fonction numérique f est T-périodique si :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x + T) = f(x).$$

I

Soit f_1 une fonction numérique continue sur $\mathbb{R}$, T-périodique ($T > 0$ donné) et telle que l'intégrale de f_1 sur l'intervalle $[0, T]$ est nulle.

1°) a) Montrer que l'intégrale d'une fonction T-périodique sur l'intervalle $[a, a + T]$ est indépendante du réel a.

b) Vérifier que toute primitive de f_1 est une fonction T-périodique.

2°) Montrer qu'on peut construire une et une seule suite de fonctions $f_1, f_2, \ldots, f_n \ldots$ vérifiant pour chaque entier $n \geqslant 2$ les deux conditions :

(C_1) f_n est une primitive de f_{n-1} sur $\mathbb{R}$.

(C_2) l'intégrale de f_n sur l'intervalle $[0, T]$ est nulle.

Montrer que f_n est T-périodique.

3°) f_1 est supposée paire. On note $\varphi_n(x) = \int_0^x f_{n-1}(t)\,dt$.

a) Quelle est la parité de φ_n ? Montrer que f_n a la parité contraire de celle de n.

b) On suppose de plus que : $\forall x \in \mathbb{R} \quad f_1\left(x + \frac{T}{2}\right) = -f_1(x)$.

Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $f_n\left(x + \frac{T}{2}\right) + f_n(x) = 0$.

Comparer $f_n(x)$ et $f_n\left(\frac{T}{2} - x\right)$.

II

On applique les notations et les résultats de la partie I à la fonction f_1, continue sur $\mathbb{R}$, 2π-périodique ($T = 2\pi$), paire, et dont la restriction à l'intervalle $[0, \pi]$ est donnée par la formule : $\forall x \in [0, \pi] \quad f_1(x) = x - \frac{\pi}{2}$

1°) a) Montrer que f_n est entièrement déterminée par sa restriction à $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ en utilisant les résultats du I 3°).

b) Prouver que sur $[0, \pi]$ f_n est égale à un polynôme P_n de degré n.

c) Pour n = 1, 2, 3, 4, 5, calculer P_n et dessiner le graphe de f_n.

2°) Montrer que f_n est monotone sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Indiquer sur un croquis l'allure du graphe de f_n (Distinguer 4 cas).

III

Dans cette partie, on pourra utiliser, si besoin est, la fonction f_0 égale à la dérivée de f_1, lorsque f_1 est dérivable.

On note M_n la borne supérieure de la fonction f_n définie au II et g_n la fonction définie par : $g_n(x) = f_n\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)$. On a alors : $M_n = g_n\left(\frac{\pi}{2}\right)$ (résultat dont la vérification n'est pas demandée).

1°) a) Montrer que $\int_{-\pi}^{+\pi} g_n(x) \sin x \, dx$ est indépendant de n et calculer sa valeur.

b) Préciser les éléments de symétrie du graphe de g_n.
Montrer que $g_{n+1} - g_n$ s'annule au moins une fois sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$.
$\left(\text{Utiliser } \int_0^{\pi} (g_{n+1} - g_n)(x) \sin x \, dx\right)$.

2°) a) Démontrer que : $g'_{n+1}(x) = g_n\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$

b) Prouver par récurrence que la fonction $g_{n+1} - g_n$ s'annule exactement une fois sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$.

c) Quel est le tableau de variations de la fonction $g_2 - g_1$ sur l'intervalle $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$?
Construire par récurrence le tableau de variations de la fonction $h_n = g_{n+1} - g_n$ sur l'intervalle $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$. (On ne cherchera pas à déterminer les extrema de h_n).

3°) a) Etudier les variations de la fonction $g_{n+2} - g_n$ sur l'intervalle $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

b) Montrer que le nombre M_n est entre M_{n-1} et M_{n-2}. Donner une valeur numérique approchée à (5.10^{-3}) près de M_n pour $n \geqslant 6$.

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail